

Méthode multipôle rapide multi-niveaux en visco-élastodynamique 3D

E. Grasso^{1,2}, S. Chaillat³, J.-F. Semblat¹, M. Bonnet²

¹ LCPC Paris, Groupe "Séismes et Vibrations", semblat@lcpc.fr

² LMS (UMR CNRS 7649), Ecole Polytechnique, {grasso,bonnet}@lms.polytechnique.fr

³ College of Computing, Georgia Institute of Technology, Atlanta, USA, stephanie.chaillat@cc.gatech.edu

Mots clés — Méthode Multipôle Rapide, Eléments de Frontière, visco-élastodynamique 3D

Contexte et enjeu La méthode des éléments de frontière accéléré par multipôles rapides (*fast multipole boundary element method*, FMBEM) et sa variante multi-niveaux (ML-FMBEM) sont connus pour être des outils puissants en calcul de propagation d'ondes, notamment pour des domaines non bornés, faisant intervenir des modèles de grande taille N [1]. Cette formulation, limitée à des comportements linéaires, prend implicitement en compte les conditions de radiation. La présente étude concerne une extension de la ML-FMBEM, sous sa forme récemment développée pour l'élastodynamique 3D dans le domaine fréquentiel [2], à la visco-élastodynamique. La dissipation du matériau est introduite dans la formulation en considérant des nombres d'ondes et des vitesses complexes. On cherche ainsi des solutions sous la forme :

$$u(x, \omega) = u_0(\omega) e^{ik^*(\omega)x}, \quad k^*(\omega) = k(\omega)[1 + i\beta(\omega)] \quad (1)$$

où k^* est le nombre d'onde complexe, $k = \omega/c(\omega)$ est le nombre d'onde réel et le paramètre $\beta(\omega)$ exprime la dissipation intrinsèque du matériau. La FM-BEM utilisée repose sur un développement de la fonction de Green $G(|\mathbf{r}|; k^*) = e^{ik^*|\mathbf{r}|}/(4\pi|\mathbf{r}|)$ pour l'équation de Helmholtz dite *diagonale* qui a la forme :

$$G(|\mathbf{r}|; k^*) = \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{S}} e^{ik^*\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}'} \mathcal{G}_L(\hat{\mathbf{s}}; |\mathbf{r}_0|, k^*) d\hat{\mathbf{s}}, \quad \mathcal{G}_L(\hat{\mathbf{s}}; |\mathbf{r}_0|, k^*) = \frac{ik^*}{16\pi^2} \sum_{0 \leq l \leq L} (2l+1) i^l h_l^{(1)}(k^*|\mathbf{r}_0|) P_l(\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) \quad (2)$$

où $\mathcal{S} = \{\hat{\mathbf{s}} \in \mathbb{R}^3, \|\hat{\mathbf{s}}\| = 1\}$ est la sphère unité, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$ et $\mathcal{G}_L(\hat{\mathbf{s}}; |\mathbf{r}_0|, k^*)$ est la fonction de transfert (exprimée en termes des fonctions de Hankel sphériques de première espèce $h_l^{(1)}$ et des polynômes de Legendre P_l). La convergence de la décomposition (2) pour $L \rightarrow +\infty$ (étudiée par Darve [3]), entraîne la convergence des noyaux élastodynamiques, qui sont des combinaisons linéaires des dérivées de $G(|\mathbf{r}|; k^*)$.

Cette décomposition étant fondamentale pour la ML-FMBEM, son évaluation numérique doit être précise. En particulier, le paramètre L de troncature de la série (2) joue un rôle crucial. Dans le cas de nombres d'onde réels, l'erreur de troncature introduite par cette approximation a été largement étudiée d'un point de vue mathématique et numérique [3, 4]. Le paramètre L dépend du niveau selon une relation du type $L = L(kd)$, d étant la taille linéaire d'une cellule cubique au niveau considéré.

Résultats. L'introduction du nombre d'onde complexe $k^*(\omega)$ influence notablement le comportement numérique du développement (2). La FMBEM pour les matériaux amortissants, et notamment l'ajustement de paramètres tels que L , sont peu abordés [5, 6]. Le choix de L résulte d'un compromis entre l'évaluation précise de $G(|\mathbf{r}|; k^*)$ et de ses dérivées (L doit être suffisamment grand) et la nécessité d'éviter la croissance $O((l/z)^l)$ de $h_l^{(1)}$ pour $l \gg z$. Dans la présente étude on ajuste empiriquement (au moyen d'expériences numériques basées sur l'évaluation de $G(|\mathbf{r}|; k^*)$ pour différentes combinaisons de nuages de points à l'intérieur de cellules situées sur une même liste d'interaction) une relation $L(|k^*d|, \beta)$ de forme inspirée par le cas du nombre d'onde réel :

$$L(|k^*d|, \beta) = \sqrt{3}|k^*d| + (7.5 + C\beta) \log_{10}(\sqrt{3}|k^*d| + \pi) \quad (3)$$

Quand $\beta = 0$, la relation (3) se réduit à celle utilisée pour l'élastodynamique [2]. La constante C est positive, la valeur de L utilisée dans (2) devant croître avec l'amortissement afin de maintenir une précision fixée au calcul, un comportement déjà constaté en électromagnétisme [5]. Notre présentation détaillera l'effet du choix de la constante C dans 3, un exemple en étant donné en Fig. 1 sur un exemple à solution

